17/03/20

Ορισμός: Ονομάζουμε πολύεδρο το σύνολο που μπορεί να περιγραφεί στη μορφή $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\underline{x} \geq \underline{b}\}$, όπου A είναι ένας πίνακας $m\times n$ και το $\underline{b}$ είναι ένα διάνυσμα που ανήκει στο $\mathbb{R}^n$

! Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή $Ax \geq \underline{b}$ και συνεπώς είναι πολύεδρο

Ορισμός: Ένα σύνολο $S\subset\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε η απόλυτη τιμή κάθε στοιχείου του S να είναι μικρότερη ή ίση της σταθεράς K

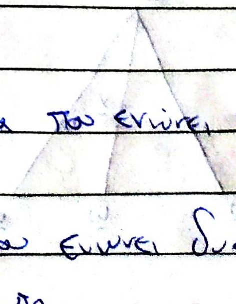
Ορισμός: Έστω $\underline{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και έστω b μια πραγματική σταθερά.

α) Το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \underline{a}^T\underline{x} = b\}$ ονομάζεται υπερεπίπεδο

β) Το σύνολο $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \underline{a}^T\underline{x} > b\}$ ονομάζεται ημιχώρος

- Το υπερεπίπεδο είναι το σύνορο του αντίστοιχου ημιχώρου και το $\underline{a}$ είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο.
- Το πολύεδρο είναι ίσο με την τομή ενός πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων.

Ορισμός: Ένα σύνολο $S\subset\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν $\forall \underline{x}_1,\underline{x}_2\in S$ και $\forall\lambda\in[0,1]$ έχουμε $\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2\in S$



Όταν $\lambda\in[0,1]$ το $\lambda x_1+(1-\lambda)\underline{x}_2$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα διανύσματα $\underline{x}_1, \underline{x}_2$

Άρα ένα σύνολο είναι κυρτό όταν το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει δύο οποιαδήποτε από τα στοιχεία του, περιέχεται στο σύνολο αυτό

Ορισμός: Έστω $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ κι ακόμη $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ πραγμ. σταθερές τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

α) Το διάνυσμα $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$ καλείται κυρτός συνδιασμός των $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$

β) Η κυρτή θήκη των διανυσμάτων $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών των διανυσμάτων αυτών.

Θεώρημα

α) Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο

β) Κάθε πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο

γ) Ο κυρτός συνδιασμός ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων ενός κυρτού συνόλου ανήκει επίσης στο κυρτό σύνολο

δ) Η κυρτή θήκη πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων είναι κυρτό σύνολο

Θεώρημα

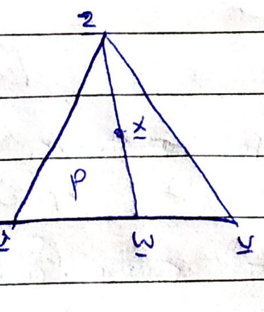
Ένα μη κενό και φραγμένο πολύεδρο είναι η κυρτή θήκη των ακροτάτων του.

Παραδείγματα

Το πολύεδρο P μπορεί να προκύψει ως το σύνολο των κυρτών συνδιασμών των κορυφών του $\underline{z}, \underline{u}, \underline{v}$

Το τυχαίο σημείο $\underline{x}$ είναι κυρτός συνδιασμός των σημείων $\underline{z}$ και $\underline{w}$

Το $\underline{z}$ είναι ακρότατο του P ενώ το $\underline{w}$ είναι κυρτός συνδιασμός των άλλων δύο ακροτάτων του P, $\underline{u}$ και $\underline{v}$



Ακρότατα, κορυφές και βασικές εφικτές λύσεις

Ορισμός Έστω ένα πολύεδρο P. Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in P$ καλείται ακρότατο του P αν δεν υπάρχουν δύο διανύσματα $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in P$ διαφορετικά του $\underline{x}$ και μια πραγματική σταθερά $\lambda \in [0,1]$ τέτοια ώστε $\underline{x} = \lambda \underline{z}_1 + (1-\lambda)\underline{z}_2$

Ορισμός: Έστω ένα πολύεδρο P. Ένα διάνυσμα $x \in P$ καλείται κορυφή του P αν υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $\underline{c}^T \underline{x} < \underline{c}^T \underline{z}$ για κάθε $\underline{z} \in P$ και $\underline{z} \neq \underline{x}$

Δηλαδή: Το x είναι κορυφή του P αν-ν το P βρίσκεται στον ένα ημίχωρο που ορίζει το υπερεπίπεδο $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{c}^T \underline{z}$ και η τομή του P με το υπερεπίπεδο είναι το x

Έστω ένα πολύεδρο $P \subset \mathbb{R}^n$ το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις

$a_i^T \underline{x} \geq b_i, \quad i=1,\dots,k$

$a_i^T \underline{x} \leq b_i, \quad i=k+1,\dots,l$

$a_i^T \underline{x} = b_i, \quad i=l+1,\dots,m$, όπου τα $\underline{a}_i$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και τα b_i πραγμ. σταθερές.

Ορισμός: Αν το διάνυσμα $\underline{x}'$ ικανοποιεί τις σχέσεις $\underline{a}_i^T \underline{x}' = b_i$ για κάποια i, οι αντίστοιχοι περιορισμοί ονομάζονται ενεργοί στο $\underline{x}'$

· Αν υπάρχουν n περιορισμοί που είναι ενεργοί σ' ένα διάνυσμα $\underline{x}'$, τότε το $\underline{x}'$ ικανοποιεί ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση αν-ν αυτές οι n εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεώρημα

Έστω x' ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $I=\{i \mid a_i^T x' = b_i\}$ όπου I το σύνολο των δεικτών των περιορισμών που είναι ενεργοί στο x'. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

α) Υπάρχουν n διανύσματα στο σύνολο $\{a_i \mid i \in I\}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα

β) Τα διανύσματα $a_i, i \in I$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, δηλ κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμ. συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών

γ) Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων $a_i^T x = b_i$ $i \in I$ έχει μία και μοναδική λύση.

Ορισμός

Έστω ένα πολύεδρο P που ορίζεται από γραμμικούς ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς και x' ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$

α) Το διάνυσμα x' είναι βασική λύση αν:

1. Όλοι οι ισοτικοί περιορισμοί είναι ενεργοί και
2. Από τους περιορισμούς που είναι ενεργοί στο x' οι n είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

β) Αν x' είναι μια βασική λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς τότε καλείται βασική εφικτή λύση (β.ε.λ)

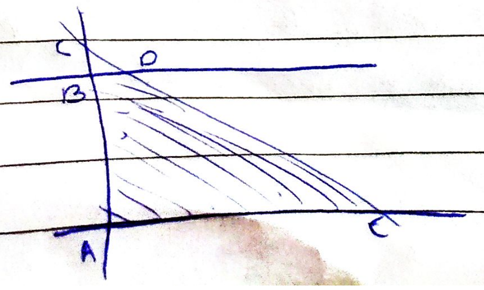
∇. Όταν λέμε ότι οι περιορισμοί $i \in I$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι εννοούμε ότι τα αντίστοιχα διανύσματα a_i, $i \in I$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

Παράδειγμα

Η σκιασμένη περιοχή που περικλείεται από τα σημεία A, B, D, E είναι η περιοχή εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ.

Τα σημεία A, B, C, D, E είναι όλα βασικές λύσεις αφού υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιορισμοί που είναι ενεργοί για κάθε μία από αυτές.

Το σημείο C όμως δεν είναι β.ε.λ αφού δεν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και είναι εκτός της περιοχής εφικτών λύσεων.



Θεώρημα

Έστω ένα πολύεδρο P και $\underline{x}'$ ένα στοιχείο αυτού. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

α) το $\underline{x}'$ είναι κορυφή του P

β) το $\underline{x}'$ είναι ακρότατο του P

γ) το $\underline{x}'$ είναι βασική εφικτή λύση του P

Θεώρημα

Το σύνολο των βασικών εφικτών λύσεων ενός πολυέδρου είναι πεπερασμένο

Πολύεδρα σε κανονική μορφή

Κανονική μορφή: όλοι οι περιορισμοί είναι ισοτικοί εκτός από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας.

Όλα τα ΠΓΠ και συνεπώς όλα τα πολύεδρα μπορούν να μετασχηματιστούν στην κανονική μορφή

$P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\}$ πολύεδρο σε κανονική μορφή και $m \times n$ οι διαστάσεις του πίνακα A, m το πλήθος των ισοτικών περιορισμών.

Από εδώ και πέρα θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι m περιορισμοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Αυτό συνεπάγεται ότι $m \leq n$ μιας και οι γραμμές του A ανήκουν στο $\mathbb{R}^n$

Αν $P \neq \emptyset$ οι γραμ. εξαρτημένοι περιορισμοί είναι πλεονάζοντες και μπορούν να παραλειφθούν.

Ορισμός: Το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών ενός πίνακα A λέγεται βαθμός του A και συμβολίζεται $r(A)$. Όταν ο βαθμός ενός πίνακα A, $r(A) = \min\{m, n\}$ λέμε ότι ο A είναι πλήρους βαθμού

Θεώρημα Έστω $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ ένα μη κενό πολύεδρο, όπου A ένας πίνακας διαστάσεων $m \times n$ με γραμμές $a_1^T, \dots, a_m^T$. Υποθέτουμε ότι $r(A) = k < m$ και οι γραμμές $a_{i_1}^T, \dots, a_{i_k}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Θεωρούμε ακόμη το πολύεδρο $Q = \{x \mid a_{i_1}^T x = b_{i_1}, \dots, a_{i_k}^T x = b_{i_k},\ x \geq 0\}$
Τότε έχουμε $P = Q$

Απόδειξη:
Έχουμε υποθέσει πως το πλήθος των περιορισμών m είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των μεταβλητών n $(m \leq n)$
Αν $n \leq m$ τότε προφανώς $r(A) = k < n \leq m$, $m-k$ περιορισμοί είναι πλεονασματικοί και το πρόβλημα ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση
Αν $r(A) = n = m$ τότε υπάρχει μία και μοναδική λύση του προβλήματος

Θεώρημα
Έστω οι περιορισμοί $Ax = b$ και $x \geq 0$ και ας υποθέσουμε ότι ο διαστάσεων $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές (δηλ. $r(A) = m$). Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση αν $Ax = b$ και
α) Υπάρχουν m στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ του πίνακα A που είναι γραμ. ανεξάρτητες
β) αν $i \neq B(1), \dots, B(m)$ τότε $x_i = 0$

Αλγόριθμος εύρεσης βασικών λύσεων.
1. Επιλέγουμε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ του πίνακα A
2. Θέτουμε $x_i = 0$ $\forall i \neq B(1), \dots, B(m)$
3. Λύνουμε το σύστημα m εξισώσεων $\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = b$ για τους αγνώστους $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$

• Αν μια βασική λύση x είναι $x \geq 0$ τότε είναι βασική εφικτή λύση
x βασική λύση τότε οι $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ καλούνται βασικές μεταβλητές ενώ οι υπόλοιπες μη βασικές
Οι στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ καλούνται βασικές στήλες και αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^m$

Σχηματίζεται ένας $m \times m$ πίνακας B που καλείται βασικός πίνακας.
Το διάνυσμα $\underline{x}_B = [x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}]^T$ περιέχει τις βασικές μεταβλητές οι οποίες καθορίζονται από την επίλυση της εξίσωσης $B\underline{x}_B = \underline{b}$ της οποίας η μοναδική λύση δίδεται από

$$\underline{x}_B = B^{-1}b$$

Παράδειγμα 2.1

$Ax = b$ και $x \geq 0$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

α) Βρείτε δύο διαφορετικές βασικές λύσεις

β) Τι θα γινόταν αν προσθέταμε μια ακόμα στήλη στον A ίση με με την 7η στήλη;

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι στήλες A_4, A_5, A_6, A_7 σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα 4×4 και προφανώς γρ. ανεξάρτητες.
Επιλέγουμε αυτές ως βασικές και επιλύοντας το αντίστοιχο σύστημα οδηγούμαστε στη βασική λύση $x_1^T = [0, 0, 0, 8, 12, 4, 6]$ η οποία είναι μη αρνητική άρα είναι και β.ε.λ

Μια άλλη λύση προκύπτει αν πάρουμε τις στήλες A_3, A_5, A_6, A_7 επίσης γραμμ.
Η αντίστοιχη βασική λύση είναι $x_1^T = [0, 0, 4, 0, -12, 4, 6]$ που δεν είναι εφικτή αφού $x_5 = -12 < 0$

Αν υπάρχει και μια όγδοη στήλη η A_8 τέτοια ώστε $A_8 = A_7$
οι βάσεις $B_2 = [A_3, A_5, A_6, A_7]$ και $B_3 = [A_3, A_5, A_6, A_8]$ ενώ είναι ίσες αντιστοιχούν σε διαφ. βασικές στήλες και μας δίνουν διαφ. β. λύσεις

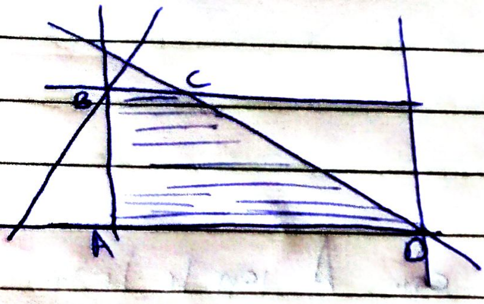
Εκφυλισμένες βασικές λύσεις

Ορισμός Μια βασική λύση $x \in \mathbb{R}^n$ καλείται εκφυλισμένη όταν περισσότεροι από n περιορισμοί είναι ενεργοί στο x

Στις δύο διαστάσεις μια εκφυλισμένη βασική λύση συναντάται στην τομή τριών ή περισσότερων γραμμών, ενώ στις 3 διαστάσεις όταν τέμνονται 4 διαφ. επίπεδα.

Παράδειγμα

Τα σημεία A και C είναι β.ε.λ ενώ τα σημεία B και D εκφυλισμένες βασ. εφικτές λύσεις



Παράδειγμα 2

Έστω ένα πολύεδρο που ορίζεται από τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$$
$$x_2 + 6x_3 \leq 12$$
$$x_1 \leq 4 \quad , \quad x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Να βρεθεί μια μη εκφυλισμένη β.ε.λ του προβλήματος και μια εκφυλισμένη β.ε.λ αν υπάρχει.

Λύση Το διάνυσμα $x_1^T = [2, 6, 0]$ είναι μη εκφυλισμένη β.ε.λ επειδή υπάρχουν ακριβώς 3 ενεργοί γρ. ανεξάρτητοι στο σημείο αυτό: ο πρώτος, ο τέταρτος και ο περιορισμός της μη αρνητικότητας $x_3 \geq 0$

Η λυση $\underline{x}_2^T = [4, 3, 2]$ ειναι εκφυλισμενη β.ε.λ. αφου τεσσερις περιορισμοι ειναι ενεργοι στο σημειο αυτο απο τους οποιους οι 3 ειναι γρ. εξαρτημενοι.
Δηλ. οι 3 πρωτοι περιορισμοι και ο περιορ. της $x_2 \geq 0$

Εκφυλισμενες βασικες λυσεις σε προβληματα εκφρασμενα σε κανονικη μορφη

Σε μια β.ε.λ ενος πολυεδρου που βρισκεται σε κανονικη μορφη οι m ισοτικοι περιορισμοι ειναι παντα ενεργοι. Συνεπως για να υπαρχουν περισσοτεροι απο n ενεργοι περιορισμοι θα πρεπει να υπαρχουν περισσοτερες απο n-m μεταβλητες ισες με το μηδεν.

Ορισμος: Εστω ενα πολυεδρο σε κανονικη μορφη $P = \{\underline{x} \in R^n \mid A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\}$ κι εστω ακομη μια βασικη λυση $\underline{x}'$. Αν το πληθος των γραμμων του A ειναι m, το διανυσμα $\underline{x}'$ ειναι εκφυλισμενη βασικη λυση αν περισσοτερες απο n-m μεταβλητες του $\underline{x}'$ ειναι μηδεν.

Παραδειγμα

Εστω πολυεδρο του προηγουμενου παραδειγματος
Εισαγοντας τις περιθωριες μεταβλητες x_4, x_5, x_6, x_7 μετασχηματιζουμε το πολυεδρο στη κανονικη μορφη $P = \{\underline{x}^T = [x_1, .., x_7] \mid A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\}$ οπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Να βρεθει μια εκφυλισμενη β.ε.λ του προβληματος, αν υπαρχει

Λυση: Θεωρουμε τη βαση B_1 που αποτελειται απο τις γρ. ανεξαρτητες στηλες A_1, A_2, A_3, A_7 ~~...~~ του πινακα A
Για την εκτιμηση της αντιστοιχης βασικης λυσης μηδενιζουμε τις μη βασικες μεταβλητες x_4, x_5, x_6 και στη συνεχεια επιλυουμε το συστημα $A\underline{x} = \underline{b}$
Η λυση που καταληγουμε ειναι η $\underline{x}_1^T = [4, 0, 2, 0, 0, 0, 6]$

Η λυση αυτη ειναι μια εκφυλισμενη βασ. λυση γιατι εχουμε συνολικα 4 μηδενικες μεταβλητες ενω $n-m=7-4=3$
Η λυση του συστηματος ικανοποιει ενα ακομη περιορισμο, το $x_2 \geq 0$ σοτικα

Υπαρξη ακροτατων και η σχεση τους με τις βελτιστες λυσεις

Ορισμος: Ενα πολυεδρο $P \subset \mathbb{R}^n$ λεμε οτι περιεχει μια ευθεια γραμμη αν υπαρχει ενα διανυσμα $x \in P$ και ενα μη μηδενικο διανυσμα $d \in \mathbb{R}^n$ τετοιο ωστε $x + \lambda d \in P \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Θεωρημα.
Εστω το πολυεδρο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, \; i=1,\dots,m\}$ ειναι μη κενο
Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:
α) Το πολυεδρο P εχει τουλαχιστον ενα ακροτατο
β) Το πολυεδρο δεν περιεχει ευθειες γραμμες
γ) Υπαρχουν n διανυσματα απο τα $a_1 \dots a_m$ που ειναι γρ. ανεξαρτητα

Παρατηρηση: Ενα φραγμενο πολυεδρο δεν περιεχει ευθεια γραμμη

Πορισμα: Καθε μη κενο φραγμενο πολυεδρο και καθε μη κενο πολυεδρο σε κανονικη μορφη εχει τουλαχιστον μια βασικη εφικτη λυση

Θεωρημα.
Θεωρουμε ενα ΠΓΠ οπου ζητειται η μεγιστοποιηση της αντικειμενικης συναρτησης $c^T x$ στο πολυεδρο P. Υποθετουμε οτι το P εχει τουλαχιστον μια κορυφη (ακροτατο) κι οτι υπαρχει βελτιστη λυση. Τοτε υπαρχει βελτιστη λυση που ειναι κορυφη του P.

Θεώρημα: Θεωρούμε ένα ΠΓΠ όπου ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $c^T x$ στο πολύεδρο P. Υποθέτουμε ότι το P έχει τουλάχιστον μια κορυφή. Τότε είτε η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $+\infty$, είτε υπάρχει μια κορυφή που είναι βέλτιστη λύση.

Πόρισμα: Θεωρούμε ένα ΠΓΠ όπου ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $c^T x$ στο μη κενό πολύεδρο P. Τότε είτε η βέλτιστη ~~λύση~~ τιμή της αντικ. συνάρτησης είναι $+\infty$ είτε υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη λύση.

✓ Όταν το πολύεδρο των εφικτών λύσεων είναι φραγμένο και μη κενό υπάρχει πάντα μια τουλάχιστον βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ

$$Z = \max(3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$4x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 11$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί είναι γρ. εξαρτημένοι. Αν πολλαπλασιάσουμε επί δύο τον πρώτο και τον προσθέσουμε στο δεύτερο παίρνουμε τον τρίτο. Άρα ένας από τους 3 περιορισμούς είναι περιττός. Αφού οι δύο πρώτοι είναι γρ. ανεξάρτητοι τους κρατάμε και διαγράφουμε τον τρίτο. Έτσι έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα:

$$Z = \max(3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

που είναι πρόβλημα βαθμού $r=2$

Εξετάζουμε αν η περιοχή εφικτών λύσεων είναι φραγμένη, που είναι ικανή συνθήκη για να έχει το πρόβλημα βέλτιστη λύση.

Από το 2° περιορισμό και τους μη αρνητικότητας έχω ότι

$0 \le x_1 \le \frac{1}{2}$

$0 \le x_2 \le 1$

$0 \le x_3 \le \frac{1}{2}$

$0 \le x_4 \le 6$

Άρα προφανώς η περιοχή είναι φραγμένη.
Αρκεί να βρούμε τις κορυφές της περιοχής εφικτών λύσεων.
Αφού $r=2$ παίρνουμε τις στήλες του πίνακα A ανά δύο.
Επειδή έχουμε 4 μεταβλητές και δύο περιορισμούς θα υπάρχουν το πολύ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ κορυφές.

α) Οι στήλες $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ γρ. ανεξάρτητες οπότε βρίσκουμε τη λύση του συστήματος

$$\underline{A}_1 x_1 + \underline{A}_2 x_2 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -3$ είναι βασική αλλά όχι εφικτή αφού $x_2 < 0$
Άρα δεν μπορεί να είναι κορυφή

β) $\underline{A}_1, \underline{A}_3$ γρ. εξαρτημένες

γ) $\underline{A}_1, \underline{A}_4$ γρ. ανεξάρτητες

$$\underline{A}_1 x_1 + \underline{A}_4 x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$x_1 = \frac{1}{2}, \; x_4 = \frac{9}{2}$ δεκτή άρα $\underline{x}_1^T = \left[\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{9}{2}\right]$ μια κορυφή δ) $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$ γρ. ανεξαρτητες

$\underline{A}_2 x_2 + \underline{A}_3 x_3 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -3 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$ δεν ειναι εφικτη

ε) $\underline{A}_2$, $\underline{A}_4$ γρ. ανεξαρτητες

$\underline{A}_2 x_2 + \underline{A}_4 x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_4 = 6 \end{matrix}$ δεκτη

$\underline{x}_2^T = [0, 1, 0, 6]$ κορυφη

στ) $\underline{A}_3$, $\underline{A}_4$

$\underline{A}_3 x_3 + \underline{A}_4 x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{9}{2} \end{matrix}$ δεκτη

$\underline{x}_3^T = [0, 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ κορυφη

Αρα υπαρχουν 3 β.ε.λ στη περιοχη εφικτων λυσεων.
Η βελτιστη θα ειναι μια εξ αυτων και πρεπει να μεγιστοποιει τη $z = \underline{c}^T \underline{x}$

$z_1 = \underline{c}^T \underline{x}_1 = 6$

$z_2 = \underline{c}^T \underline{x}_2 = 11$

$z_3 = \underline{c}^T \underline{x}_3 = 3.5$

Συνεπως η βελτιστη λυση ειναι η $\underline{x}_2^T = [0, 1, 0, 6]$